

IV

解答

25-① 26-② 27-③ 28-④ 29-② 30-④

31-① 32-③

解説 《戦後の日本経済》

28 ④が正解。B：1947年に復興金融金庫が設立され、日本銀行による資金調達が行なわれたが、通貨供給量急増によるインフレーションを招いた。C：1948年の経済安定9原則に基づく諸政策によりインフレーションは収束したが、A：急激な金融引き締めは安定恐慌を発生させた。

32 ③適切。①不適。円安ドル高が誤り。円高ドル安のため、輸出に不利になり、日本経済は苦境に立たされた。②不適。大幅な金融引き締め実施が誤り。内需拡大のため規制緩和が行われた。④不適。政府が進める高金利政策が誤り。バブル経済は低金利政策を背景として発生した。

V

解答

33-① 34-③ 35-② 36-③ 37-④ 38-①

39-② 40-④

解説 《環境とエネルギー問題》

34 ③が正解。Xは総排出量をもっとも多く、またその一方で一人あたりの排出量が少ないことから人口の多い中国であることが予想できる。同様に、Zは総排出量に対して一人あたりの排出量が多いので、選択肢の中では人口の少ないロシアを選べる。

36 ③が正解。パリ協定では、削減目標を5年ごとに見直して提出することを義務化しているが、削減目標達成については義務化していない。

37 ④が正解。日本は火力発電による発電量が多いという特徴があるため、電源として石炭・石油・ガスが多くを占めることから、Dを選べる。また、火力発電の電源の内訳はガスが最も多く、次いで石炭となる。

38 ①が正解。古いものから順に並べると、A：スリーマイル島原子力発電所事故（1979年）→B：チェルノブイリ（チョルノービリ）原子力発電所事故（1986年）→C：東海村核燃料加工施設臨界事故（1999年）となる。

39 ②が正解。A. 正文。B. 誤文。「もんじゅ」は1995年の火災事故や2010年の炉内中継装置落下事故などによる運転停止と再開を繰り返し、2016年に廃炉が決定、核燃料サイクル計画は頓挫した。

数学

◀数学I・A▶

1

解答

(1) 1 1 (2) 2 3 14 (3) 4 3

(4) 5 5 6 7 41 8 2 9 5 10 11 12 137 13 2

解説 《小問4問》

(1) $A = \{1, 3, a^2 + 4a + 8, 3a + 1\}$, $B = \{3, a + 11, -a + 5, 2a - 1\}$ において

$A \cap B = \{3, 4, a\}$ より、 A の要素である $a^2 + 4a + 8$ と $3a + 1$ のどちらかが4となるので

(i) $a^2 + 4a + 8 = 4$ のとき、 $(a + 2)^2 = 0$ より $a = -2$

このとき、 $A = \{1, 3, 4, -5\}$, $B = \{3, 9, 7, -5\}$ となり不適。

(ii) $3a + 1 = 4$ のとき $a = 1$

このとき、 $A = \{1, 3, 13, 4\}$, $B = \{3, 12, 4, 1\}$ となり、題意を満たす。よって $a = 1 \rightarrow \boxed{1}$

(2) $\sqrt{n^2 + 29} = m$ ($\sqrt{n^2 + 29} \geq \sqrt{30} > 0$ より、 m は自然数) とおけるので

$$n^2 + 29 = m^2$$

$$m^2 - n^2 = 29$$

$$(m - n)(m + n) = 29$$

29は素数であり、 $m + n > 0$ より、 $m - n > 0$ でもあるから

$$\begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 29 \end{cases}$$

である。これより

$$m = 15, n = 14 \rightarrow \boxed{2 \ 3}$$

(3) 各データの値の2乗の平均は

$$\frac{1}{5} \{7^2 + x^2 + (x+1)^2 + (4x-2)^2 + (2x)^2\} = \frac{1}{5} (22x^2 - 14x + 54)$$

.....①

各データの平均値の2乗は

$$\left\{ \frac{1}{5}(7+x+x+1+4x-2+2x) \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{5}(8x+6) \right\}^2 \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②より, これらのデータの分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}(22x^2-14x+54) - \left\{ \frac{1}{5}(8x+6) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{25}(46x^2-166x+234) \end{aligned}$$

となる。標準偏差の2乗が分散であるから

$$\frac{1}{25}(46x^2-166x+234) = (\sqrt{6})^2$$

よって

$$23x^2-83x+42=0$$

$$(x-3)(23x-14)=0$$

$$x=3, \frac{14}{23}$$

x は自然数なので $x=3 \rightarrow \boxed{4}$

(4) $|2x+4|-|x^2-16| < 3x+8$ より

$$|2x+4|-3x-8 < |x^2-16| \quad \cdots \cdots ③$$

$y=|2x+4|-3x-8$ とすると

$x \leq -2$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -(2x+4)-3x-8 \\ &= -5x-12 \end{aligned}$$

$x \geq -2$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (2x+4)-3x-8 \\ &= -x-4 \end{aligned}$$

$y=|x^2-16|$ とすると

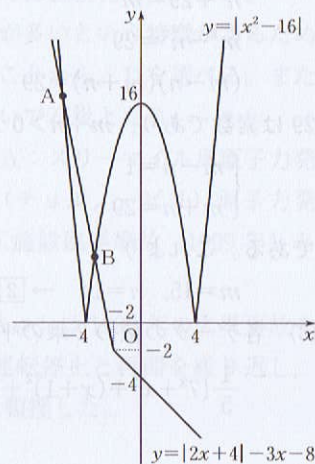
$x \leq -4, x \geq 4$ のとき $y=x^2-16$

$-4 \leq x \leq 4$ のとき $y=-x^2+16$

以上より, 2つの関数のグラフは右図のようになる。

$-5x-12=x^2-16$ より

$$x^2+5x-4=0$$



$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

よって, 点 A の x 座標は $x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2}$

また, $-5x-12=-x^2+16$ より

$$x^2-5x-28=0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{2}$$

よって, 点 B の x 座標は $x = \frac{5 - \sqrt{137}}{2}$

以上より, 不等式③, つまり与えられた不等式の解は

$$x < \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} \rightarrow \boxed{5} \sim \boxed{8}$$

$$x > \frac{5 - \sqrt{137}}{2} \rightarrow \boxed{9} \sim \boxed{13}$$

2

解答

(1) $\boxed{14}$ 1 $\boxed{15}$ 4 (2) $\boxed{16}$ $\boxed{17}$ 12

(3) $\boxed{18}$ 9 (4) $\boxed{19}$ $\boxed{20}$ 33 $\boxed{21}$ 4

解説 《余弦定理, 接弦定理, 方べきの定理》

(1) 直線 DC の延長線上の点を F とすると,

接弦定理より

$$\angle ACD = \angle ABC \quad \cdots \cdots ①$$

$$\angle ECF = \angle EAC \quad \cdots \cdots ②$$

また, $AE \parallel DF$ より

$$\angle ACD = \angle EAC \quad \cdots \cdots ③$$

$\widehat{AC}$ の円周角より

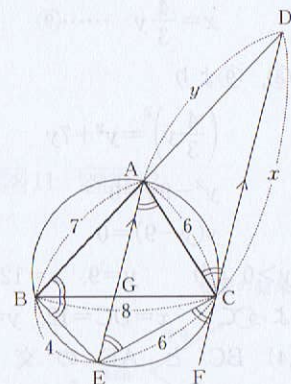
$$\angle ABC = \angle AEC \quad \cdots \cdots ④$$

$\widehat{EC}$ の円周角より

$$\angle EAC = \angle EBC \quad \cdots \cdots ⑤$$

①~⑤より, これらの角はすべて等しいので, $\triangle CAE$ は二等辺三角形となり, $CE=CA=6$ となる。

四角形 ABEC は円に内接しているので, $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC$ が成立することに着目して, $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると



$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos \angle BAC = 85 - 84 \cos \angle BAC \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

△EBC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BC^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(180^\circ - \angle BAC) \\ &= 52 + 48 \cos \angle BAC \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ より } 85 - 84 \cos \angle BAC = 52 + 48 \cos \angle BAC$$

$$\text{よって } \cos \angle BAC = \frac{1}{4} \rightarrow \textcircled{14} \cdot \textcircled{15}$$

(2)・(3) △ABC に余弦定理を用いると, ⑥より

$$\begin{aligned} BC^2 &= 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos \angle BAC \\ &= 49 + 36 - 84 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\text{よって } BC = 8$$

DC = x, AD = y とおくと, 方べきの定理より

$$x^2 = y(y+7) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

が成立する。

また, 2 角が等しいことより, △CBD ∽ △ACD であり, 8 : x = 6 : y であるから

$$x = \frac{4}{3}y \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑧, ⑨より

$$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 = y^2 + 7y$$

$$y^2 - 9y = 0$$

$$y(y-9) = 0$$

$$y > 0 \text{ より } y = 9, x = 12$$

$$\text{よって } x = DC = 12, y = AD = 9 \rightarrow \textcircled{16} \sim \textcircled{18}$$

(4) BC と AE の交点を G とおくと, AG // DC より, BA : AD = BG : GC = 7 : 9 であるから

$$BG = 8 \times \frac{7}{7+9} = \frac{7}{2}, GC = 8 \times \frac{9}{7+9} = \frac{9}{2}$$

また, AG : DC = BA : BD = 7 : 16 より

$$AG = 12 \times \frac{7}{16} = \frac{21}{4}$$

よって, 方べきの定理より

$$AG \times GE = BG \times GC$$

$$\frac{21}{4} \times GE = \frac{7}{2} \times \frac{9}{2}$$

$$GE = 3$$

$$\text{よって } AE = AG + GE = \frac{21}{4} + 3 = \frac{33}{4} \rightarrow \textcircled{19} \sim \textcircled{21}$$

別解 1 △ABE に余弦定理を用いると

$$AE^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos \angle ABE = 65 - 56 \cos \angle ABE$$

また, △CAE に余弦定理を用いると

$$AE^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos(180^\circ - \angle ABE) = 72 + 72 \cos \angle ABE$$

$$65 - 56 \cos \angle ABE = 72 + 72 \cos \angle ABE \text{ より}$$

$$\cos \angle ABE = -\frac{7}{128}$$

$$\text{よって } AE = \frac{33}{4}$$

別解 2 トレミーの定理より

$$AB \times EC + BE \times CA = AE \times BC$$

$$7 \times 6 + 4 \times 6 = AE \times 8$$

$$8AE = 66$$

$$\text{よって } AE = \frac{33}{4}$$

3

解答

(1) 22 23 27 24 25 26 250 (2) 27 28 11 29 30 12

(3) 31 1 32 33 34 892

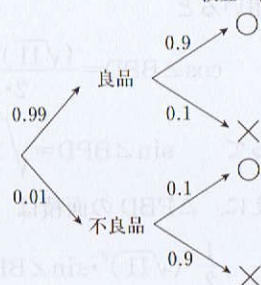
解説 《条件付き確率》

(1) 製品の検査の結果が良品の場合を○, 不良品の場合を×とすると, 題意より, 右図のような検査の状況となり, 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{99}{100} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \times \frac{9}{10} &= \frac{108}{1000} \\ &= \frac{27}{250} \end{aligned}$$

→ 22 ~ 26

検査の結果



(2) 求める条件付き確率は、(1)より

$$\left(\frac{99}{100} \times \frac{1}{10}\right) \div \frac{108}{1000} = \frac{99}{1000} \times \frac{1000}{108}$$

$$= \frac{11}{12} \rightarrow [27] \sim [30]$$

(3) 製品のある1個が不良品ではないと、検査の結果が出る確率は

$$\frac{99}{100} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{892}{1000}$$

したがって、求める条件付き確率は

$$\left(\frac{1}{100} \times \frac{1}{10}\right) \div \frac{892}{1000} = \frac{1}{892} \rightarrow [31] \sim [34]$$

4

解答

(1)[35] 2 [36] 7 (2)[37][38] 10 [39] 3 [40] 3

(3)[41] 5 [42] 7 [43][44] 21

解説 《立体図形》

(1) $\triangle ADC$ に余弦定理を用いると

$$\cos \angle DAC = \frac{4^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

 $\triangle ADP$ に余弦定理を用いると

$$PD^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos \angle DAP$$

$$= 17 - 8 \cdot \frac{3}{4}$$

$$= 11$$

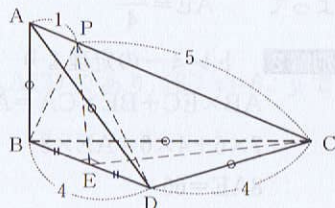
ゆえに $PD = \sqrt{11}$ また、 $\triangle ADP \equiv \triangle ABP$ より、 $PB = \sqrt{11}$ となる。よって、 $\triangle PBD$ は $PB = PD$ の二等辺三角形となり、 $\triangle PBD$ に余弦定理を用いると

$$\cos \angle BPD = \frac{(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{11})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{3}{11}$$

$$\text{よって } \sin \angle BPD = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{11}\right)^2} = \frac{4\sqrt{7}}{11}$$

ゆえに、 $\triangle PBD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{11})^2 \cdot \sin \angle BPD = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{11} = 2\sqrt{7} \rightarrow [35] \cdot [36]$$

(2) BD の中点を E とすると、 $\triangle AEC$ はこの立体の対称面となる。ゆえに、 $\triangle PEC$ はこの対称面上に存在する。 $\triangle PEC$ に余弦定理を用いると

$$\cos \angle PEC = \frac{(\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-6}{4\sqrt{21}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

よって

$$\sin \angle PEC = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{84}} = \sqrt{\frac{75}{84}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

ゆえに、四面体 PBCD の高さを PF とすると

$$PF = PE \times \sin \angle PEC$$

$$= \sqrt{7} \times \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5}{2}$$

よって、四面体 PBCD の体積は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{10}{3} \sqrt{3} \rightarrow [37] \sim [40]$$

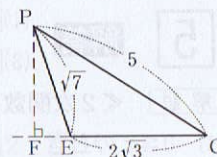
(3) 点 C から $\triangle PBD$ に下ろした垂線の長さを h とおく。(1)、(2)より、

四面体 PBCD の体積は

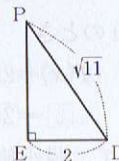
$$2\sqrt{7} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3} h$$

$$\text{よって } \frac{2\sqrt{7}}{3} h = \frac{10}{3} \sqrt{3}$$

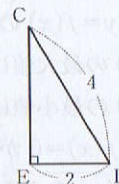
$$\text{ゆえに } h = \frac{5}{7} \sqrt{21} \rightarrow [41] \sim [44]$$



PE について



EC について



5

解答

(1) 45 4 (2) 46 47 10 48 8

(3) 49 8 50 0

解説 《2次関数の最大・最小, 2次方程式の解の個数》

(1) $0 \leq x$ のとき

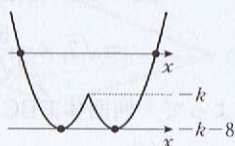
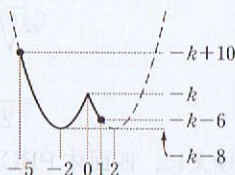
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - k \\ &= 2(x-2)^2 - k - 8 \end{aligned}$$

 $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x - k \\ &= 2(x+2)^2 - k - 8 \end{aligned}$$

よって, 最小値は $-k-8$ ($x=\pm 2$ のとき) よりしたがって $k=4 \rightarrow 45$ (2) $y=f(x)$ のグラフは右図のようになるので $f(x)$ の最大値は $(f(-5)) = -k+10 \rightarrow 46, 47$ $f(x)$ の最小値は $(f(-2)) = -k-8 \rightarrow 48$

(3) $f(x)=0$ が異なる実数解を 2 つもつには,
 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点
 をもつときであるので, x 軸が $y=-k$ より上に
 あるときまたは, x 軸が $y=-k-8$ と重なる時
 が条件を満たす。

よって $0 > -k$ すなわち $k > 0 \rightarrow 50$ または $-k-8=0$ すなわち $k=-8 \rightarrow 49$ 

◀ 数学 I・II・A・B ▶

1

解答

(1) 1 2 3 403 (2) 4 1 = 5 7 (3) 6 2 7 1

(4) 8 9 17 10 8 11 4 (5) 12 13 28

解説 《小問 5 問》

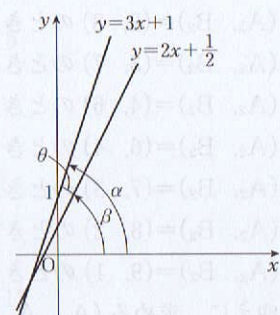
(1) $144=2^4 \times 3^2$ より, 正の約数の総和は

$$\begin{aligned} (2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1+3^2) &= (1+2+4+8+16)(1+3+9) \\ &= 31 \times 13 = 403 \rightarrow 1 \sim 3 \end{aligned}$$

(2) x 軸と直線 $y=3x+1$ とのなす角を α , x 軸と直線 $y=2x+\frac{1}{2}$ とのなす角を β とす

ると, 2 直線のなす角 $\theta = \alpha - \beta$, $\tan \alpha = 3$,
 $\tan \beta = 2$ より

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ &= \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} = \frac{1}{7} \rightarrow 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

(3) $x^{10}+2x^9$ を x^2+1 で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと恒等式 $x^{10}+2x^9=(x^2+1)Q(x)+ax+b \dots\dots ①$

が成立する。

①の両辺に虚数単位 i を代入すると

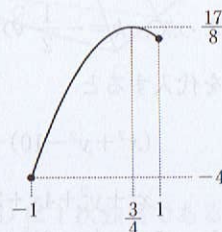
$$\begin{aligned} i^{10}+2i^9 &= (i^2+1)Q(i)+ai+b \\ -1+2i &= ai+b \end{aligned}$$

 a, b はともに実数より, $a=2, b=-1$ となるので求める余りは $2x-1 \rightarrow 6 \cdot 7$ (4) $y=3\cos x - \cos 2x$

$$= 3\cos x - (2\cos^2 x - 1)$$

$$= -2\cos^2 x + 3\cos x + 1$$

$$= -2\left(\cos x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

 $0 \leq x \leq \pi$ より $-1 \leq \cos x \leq 1$ ゆえに, 右図より求める最大値は $\frac{17}{8} \rightarrow 8 \sim 10$ 

最小値は $-4 \rightarrow \boxed{11}$

(5) 題意の示す数は

$$(10A_1 + A_2) + (10B_1 + B_2) = 10(A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)$$

よって、 $10(A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) = 80$ を満たすのは A_1, A_2, B_1, B_2 が異なる 1 から 9 の中の数であることから

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 7 \\ A_2 + B_2 = 10 \end{cases}$$

を満たすときである。

$(A_2, B_2) = (1, 9)$ のとき $(A_1, B_1) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$

$(A_2, B_2) = (2, 8)$ のとき $(A_1, B_1) = (1, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 1)$

$(A_2, B_2) = (3, 7)$ のとき $(A_1, B_1) = (1, 6), (2, 5), (5, 2), (6, 1)$

$(A_2, B_2) = (4, 6)$ のとき $(A_1, B_1) = (2, 5), (5, 2)$

$(A_2, B_2) = (6, 4)$ のとき $(A_1, B_1) = (2, 5), (5, 2)$

$(A_2, B_2) = (7, 3)$ のとき $(A_1, B_1) = (1, 6), (2, 5), (5, 2), (6, 1)$

$(A_2, B_2) = (8, 2)$ のとき $(A_1, B_1) = (1, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 1)$

$(A_2, B_2) = (9, 1)$ のとき $(A_1, B_1) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$

ゆえに、求める (A_1, A_2, B_1, B_2) の場合の数は 28 通り $\rightarrow \boxed{1213}$

2

解答

(1) $\boxed{14} 2$ $\boxed{15} 1$ (2) $\boxed{16} 5$

(3) $\boxed{17} 2$ $\boxed{18} 5$ $\boxed{19} 5$

解説 《2 円の交点を通る円》

(1)・(2) 2 円の交点 A, B を通る円の方程式は

$$(x^2 + y^2 - 10) + k(x^2 + y^2 - 4x - 2y) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける。

①に $P(-6, 2)$ を代入して $30 + 60k = 0$

よって、 $k = -\frac{1}{2}$ のとき、①は円 C の方程式となるので、①に $k = -\frac{1}{2}$

を代入すると

$$(x^2 + y^2 - 10) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 4x - 2y) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

$$\text{よって } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

ゆえに、円 C の中心の座標は

$$(-2, -1) \rightarrow \boxed{14} \cdot \boxed{15}$$

また、半径は 5 $\rightarrow \boxed{16}$

(3) ①に $k = -1$ を代入すると、2 交点

A, B を通る直線となる。

$$4x + 2y - 10 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

点 C から直線②までの距離は点 C から

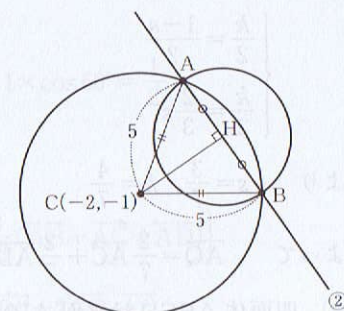
直線②に下ろした垂線の足を H とする

と、線分 CH の長さであり

$$CH = \frac{|4(-2) + 2(-1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|-20|}{2\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

よって、 $\triangle ACH$ において

$$\sin \angle CAB = \frac{CH}{CA} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow \boxed{17} \sim \boxed{19}$$



3

解答

(1) $\boxed{20} 2$ $\boxed{21} 7$ $\boxed{22} 2$ $\boxed{23} 7$

(2) $\boxed{24} 2$ $\boxed{25} \boxed{26} 13$ $\boxed{27} 7$ $\boxed{28} \boxed{29} 13$

(3) $\boxed{30} 2$ $\boxed{31} 6$ $\boxed{32} \boxed{33} 13$

解説 《正四面体における空間ベクトル》

(1) 3 点 A, Q, M は一直線上にあ

るから実数 k を使って

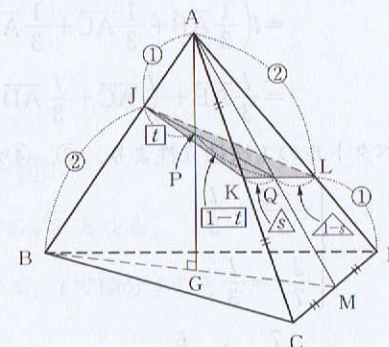
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= k\overrightarrow{AM} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AD} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle AKL$ において、

$KQ : QL = s : (1-s)$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= (1-s)\overrightarrow{AK} + s\overrightarrow{AL} \\ &= \frac{1-s}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{AD} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

平面 ACD において、平面ベクトルとして $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AD}$ は 1 次独立であるから、①、②の係数を比較して



$$\begin{cases} \frac{k}{2} = \frac{1-s}{2} \\ \frac{k}{2} = \frac{2}{3}s \end{cases}$$

$$\text{より } s = \frac{3}{7}, k = \frac{4}{7}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AD} \rightarrow \text{[20]} \sim \text{[23]}$$

(2) 四面体 ABCD は平面 ABM に関して対称であり、4 点 A, P, J, Q は平面 ABM 上の点であるので、 $\triangle AJQ$ において、 $JP:PQ=t:(1-t)$ とおくと、(1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AJ} + t\overrightarrow{AQ} \\ &= \frac{1-t}{3}\overrightarrow{AB} + t\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1-t}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}t\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}t\overrightarrow{AD} \quad \cdots \cdots \text{[3]} \end{aligned}$$

また、点 G は平面 ABM 上にあり、3 点 A, P, G は一直線上にあるから、実数 l を使って $\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AG}$ と書ける。

点 G は $\triangle BCD$ の重心より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= l\overrightarrow{AG} \\ &= l\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{l}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{l}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{l}{3}\overrightarrow{AD} \quad \cdots \cdots \text{[4]} \end{aligned}$$

ベクトルの 1 次独立性より、[3]、[4]から

$$\begin{cases} \frac{1-t}{3} = \frac{l}{3} \\ \frac{2}{7}t = \frac{l}{3} \end{cases}$$

$$t = \frac{7}{13}, l = \frac{6}{13}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AP} = \frac{1-t}{3}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{13}\overrightarrow{AQ} \rightarrow \text{[24]} \sim \text{[29]}$$

(3) [3]より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{13}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

また

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= \left\{ \frac{2}{13}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \right\} \cdot \left\{ \frac{2}{13}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \right\} \\ &= \left(\frac{2}{13} \right)^2 \{ |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\quad + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \} \\ &= \left(\frac{2}{13} \right)^2 \left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{13} \right)^2 \cdot 6 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{AP}| = \frac{2\sqrt{6}}{13} \rightarrow \text{[30]} \sim \text{[33]}$$

4

解答

(1)[34] 1 [35] 2 [36] 2 [37] 2

(2)[38] 1 [39] 2 [40] 3 [41] 8 [42][43] 27 [44] 2

【解説】《指数関数、3 次関数の最大値》

$$(1) f(x) = 8^x - 4^{x+\frac{3}{4}} + 2^{x+1}$$

$$= (2^3)^x - (2^2)^{x+\frac{3}{4}} + 2^x \cdot 2^1$$

$$= (2^x)^3 - (2^x)^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 2^x \cdot 2^1$$

$$= t^3 - 2\sqrt{2}t^2 + 2t \rightarrow \text{[34]} \sim \text{[37]}$$

$$(2) x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } t \leq 2^{\frac{1}{2}} \text{ より, } 0 \leq t \leq \sqrt{2} \text{ となる。}$$

(1)より、 $g(t) = t^3 - 2\sqrt{2}t^2 + 2t$ において、 t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 4\sqrt{2}t + 2 \\ &= (3t - \sqrt{2})(t - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$g'(t) = 0 \text{ となるのは, } t = \frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2} \text{ のとき}$$

である。

よって、 $g(t)$ の増減表は右の通りとなる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-	0
$g(t)$		↗	最大	↘	0

ゆえに、 $f(x)$ の最大値は $t = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，すなわち $2^x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のときであるから

$$x = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3} = \log_2 \sqrt{2} - \log_2 3 = \frac{1}{2} - \log_2 3 \rightarrow [38] \sim [40]$$

最大値は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{8}{27}\sqrt{2} \rightarrow [41] \sim [44] \end{aligned}$$

5

解答

(1) [45] 4 (2) [46] 4 [47] [48] 36

(3) [49] 6 [50] 3

解説 《2次関数のグラフの共通接線》

(1) C_1, C_2 を連立すると、 $-x^2 + 8x = -4x^2 + 20x$ より

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x-4) = 0$$

ゆえに $x = 0, 4$

$x \neq 0$ より $x = 4 \rightarrow [45]$

(2) C_1 を表す関数を微分すると、 $y' = -2x + 8$ より、接線 l との接点を $(t, -t^2 + 8t)$ とおくと、接線 l は $y - (-t^2 + 8t) = (-2t + 8)(x - t)$ より

$$l: y = (-2t + 8)x + t^2 \quad \cdots \cdots [1]$$

同様に、 C_2 を表す関数を微分すると、 $y' = -8x + 20$ より、接線 l との接点を $(s, -4s^2 + 20s)$ とおくと、接線 l は

$$y - (-4s^2 + 20s) = (-8s + 20)(x - s) \text{ より}$$

$$l: y = (-8s + 20)x + 4s^2 \quad \cdots \cdots [2]$$

①, ②より

$$\begin{cases} -2t + 8 = -8s + 20 & \cdots \cdots [3] \\ t^2 = 4s^2 & \cdots \cdots [4] \end{cases}$$

③, ④より

$$(4s - 6)^2 = 4s^2$$

$$(s - 1)(s - 3) = 0$$

ゆえに $s = 1, 3$

2 曲線の接点は第 1 象限にあるので、 $s = 1$ のとき、 $t = -2$ となり、不適。

$s = 3$ のとき、 $t = 6$ は題意を満たす。

よって、①より $l: y = -4x + 36 \rightarrow [46] \sim [48]$

(3) ②より、 C_1 と l との接点の x 座標は $t = 6 \rightarrow [49]$

C_2 と l との接点の x 座標は $s = 3 \rightarrow [50]$