

数学

数学 I ・ A

(60 分)

解答は解答番号 **1** から **48** までにマークしなさい。解答が分数形で求められている場合は、既約分数で答えなさい。また、解答が根号を含む形で求められている場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。さらに、解答が比で求められている場合は、最も簡単な整数の比で答えなさい。

1

(1) 1 から 2022 までの整数のうち、2 または 3 で割り切れるが、5 では割り切れない数は **1 2 3 4** 個ある。

(2) a を定数とする 2 つの方程式

$$x^2 + ax = 6$$

$$(x+1)^2 = 3a+1$$

が共通の実数解をもつとき、 $a = \mathbf{5}$, $\mathbf{6}$ である。ただし、 $\mathbf{5} < \mathbf{6}$ とする。

(3) $AB = 4$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 9$ の四角形 $ABCD$ が、円に内接しているとき、

$$BD = \sqrt{\mathbf{7 8}}$$
 である。

(4) 正八角形の頂点を結んでできる三角形のうち、正八角形と辺を共有する三角形は **9 10** 個ある。

2 不定方程式 $13x + 17y = k$ (k は整数) の整数解について考える。

(1) $k = 1$ のとき、 $x < 100$, $y < 100$ を満たす解は **11 12** 個ある。

(2) $k = 13$ のとき、 $0 < x - y < 300$ を満たす解は **13 14** 個ある。このうち、 x の絶対値が最小の解は $(x, y) = (\mathbf{15}$, $\mathbf{16})$ である。

3 $f(x)$ を 2 次関数とし、放物線 $C: y = f(x)$ が 3 点 $(2, 69)$, $(-1, 15)$, $(-3, -1)$ を通る。放物線 C を y 軸について対称移動した、放物線の式を $y = g(x)$ とする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ は、 $f(x) = \mathbf{17} x^2 + \mathbf{18 19} x + \mathbf{20 21}$ であり、2 次関数 $g(x)$ の最小値は、 $-\mathbf{22}$ である。

(2) t を定数とする。2 次関数 $g(x)$ の $t \leq x \leq t+1$ における最大値を M 、最小値を m とする

とき、 $M - m = \frac{9}{8}$ となるのは、 $t = \frac{\mathbf{23 24}}{\mathbf{25}}$ または $\frac{\mathbf{26 27}}{\mathbf{28}}$ のときである。ただし、

$$\frac{\mathbf{23 24}}{\mathbf{25}} < \frac{\mathbf{26 27}}{\mathbf{28}}$$
 とする。

- 4 $AB = AC = 5$, $\cos \angle A = \frac{3}{4}$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB を点 A から B の方向へ延長した直線上に $AB = 5BD$ となる点 D をとり、 $\triangle ACD$ について考える。

(1) $\sin \angle A = \frac{\sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$

(2) $\triangle ACD$ の面積を S_1 , $\triangle ABC$ の面積を S_2 とすると, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$ である。

(3) $\triangle ACD$ の外接円の半径を R_1 , $\triangle ABC$ の外接円の半径を R_2 とすると, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\boxed{33}}{\boxed{34}} \sqrt{\boxed{35}}$ である。

(4) $\triangle ACD$ の内接円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37}}$ である。

- 5 10 本のくじの中に 4 本の当たりくじがある。

(1) 2 本のくじを同時にひくとき, 2 本の当たりくじをひく確率は, $\frac{\boxed{38}}{\boxed{39} \boxed{40}}$ である。

(2) 1 本のくじをひいて結果を見てから元に戻す。これを 4 回繰り返すとき, 2 回だけ当たりくじをひく確率は, $\frac{\boxed{41} \boxed{42} \boxed{43}}{\boxed{44} \boxed{45} \boxed{46}}$ である。

(3) 4 本のくじを同時にひくとき, 当たりくじが 2 本だけの場合の確率は, $\frac{\boxed{47}}{\boxed{48}}$ である。

◀ 数学 I ・ II ・ A ・ B ▶

(60 分)

解答は解答番号 $\boxed{1}$ から $\boxed{50}$ までにマークしなさい。解答が分数形で求められている場合は、既約分数で答えなさい。また、根号を含む形で求められている場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。さらに、解答が比で求められている場合は、最も簡単な整数の比で答えなさい。

1

- (1) 100 円玉, 50 円玉, 10 円玉の 3 種類の硬貨のうち 1 種類以上を使って, 390 円をお釣りがなく支払う方法は全部で $\boxed{1} \boxed{2}$ 通りある。

- (2) 方程式 $|2x - 1| - 5 = 2$ の最大の解は $\boxed{3}$ である。

- (3) 5 人でじゃんけんを 1 回するとき, 勝負がつかない確率は $\frac{\boxed{4} \boxed{5}}{\boxed{6} \boxed{7}}$ である。ただし, 手の出し方は同様に確からしいとする。

- (4) 座標空間の 2 つのベクトル $\vec{a} = (-1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 3, k)$ がある。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° のとき, $k = -\boxed{8}$ である。

2 数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 1$ で、関係式

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n, \quad a_{2n+1} = a_{2n} - n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立っている。

(1) $a_6 = \boxed{9} \boxed{10}$

(2) $a_{2n+1} = \frac{\boxed{11}}{\boxed{12}} (n + \boxed{13})(n + \boxed{14}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ である。ただし、 $\boxed{13} < \boxed{14}$ とする。

(3) $\{a_n\}$ の項がはじめて 50 を超えるのは第 $\boxed{15} \boxed{16}$ 項である。

3 座標平面上に点 $A(1, 0)$ と、原点 O を中心とする半径 1 の円がある。点 B は第 1 象限内でこの円周上を動く。直線 OB と x 軸のなす角を θ とすると、 $B(\cos \theta, \sin \theta) \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ となる。また、点 C を点 B の y 軸に関して対称な点とする。

(1) 台形 $OABC$ の周の長さは $-\boxed{17} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \boxed{18} \sin \frac{\theta}{2} + \boxed{19}$ である。

(2) 台形 $OABC$ の周の長さの最大値は $\frac{\boxed{20} \boxed{21}}{\boxed{22}}$ である。

(3) 台形 $OABC$ の周の長さが最大となるときの点 B の座標は $\left(\frac{\boxed{23}}{\boxed{24}}, \frac{\sqrt{\boxed{25} \boxed{26}}}{\boxed{27}} \right)$ である。

4 実数 x, y が $x \geq 1, y \geq 1$ であって、

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \log_2 \frac{x^3}{2} + \log_2 2y^2$$

を満たしている。

(1) $X = \log_2 x, Y = \log_2 y$ とおくとき、点 (X, Y) は $\left(\frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}, \boxed{30} \right)$ を中心とする半径

$$\frac{\sqrt{\boxed{31} \boxed{32}}}{\boxed{33}}$$

の円周上にある。

(2) $\log_2 xy^2$ の値が最小となるのは $(x, y) = (\boxed{34}, \boxed{35})$ のときである。

(3) $\log_2 xy^2$ の値の最大値は $\frac{\boxed{36}}{\boxed{39}} + \frac{\sqrt{\boxed{37} \boxed{38}}}{\boxed{39}}$ である。

5 関数 $f(t) = \int_0^1 |x^3 - 8t^3| dx$ について考える。

(1) $t \leq 0$ のとき、 $f(t) = \frac{\boxed{40}}{\boxed{41}} - \boxed{42} t^3$ である。

(2) $0 < t < \frac{1}{2}$ のとき、 $f(t) = \boxed{43} \boxed{44} t^4 - \boxed{45} t^3 + \frac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$ である。

(3) $-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最小値は $\frac{\boxed{48}}{\boxed{49} \boxed{50}}$ である。