

- I 次の ①～②③ の中に適切な数字を入れなさい。ただし、(1), (3) については、[選択肢]の中から選びなさい。

- (1) x についての連立不等式

$$\begin{cases} 5 - 2x > 1 \\ |x - 1| < 4 \end{cases}$$

の解は、①である。①にあてはまるものを、次の④～⑥の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

④ $-3 < x < 2$

⑤ $2 < x < 5$

⑥ $x < -3, 2 < x$

⑦ $x < 2, 5 < x$

- (2) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ のとき、 $2\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{4a^2 + 4a + 1} =$ ②である。

- (3) x についての 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ のグラフを $y = f(x)$ として描くと右図のようになった。このとき、 a, b, c の符号は、

a は ③, b は ④, c は ⑤ である。

③, ④, ⑤ にあてはまるものを、次の⑧～⑩の中から選び、その番号を答えなさい。ただし、同じものを選んでもよい。

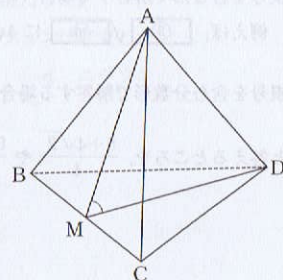
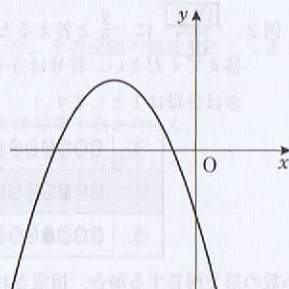
[選択肢]

⑧ 正 ⑨ 負 ⑩ 0

- (4) 正四面体 ABCD において、BC の中点を M とする。

このとき、

$$\sin \angle AMD = \frac{\text{⑥} \sqrt{\text{⑦}}}{\text{⑧}}$$



- (5) あるサッカーチームにおいて、最近 12 試合の得点を調べると、0 点が 5 試合、1 点が 1 試合、2 点が 1 試合、3 点が 1 試合、4 点が 2 試合、5 点が 2 試合だった。この得点のデータにおける標準偏差は、⑨点である。

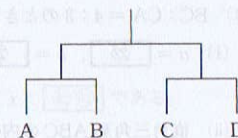
- (6) A, B, C, D の 4 人で剣道のトーナメント戦をすること

になった。トーナメントの試合は図のようになっている。

A が B, C, D に勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ である。

C が D に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ である。このとき、A が優勝する

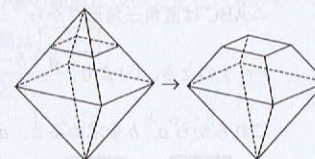
確率は、 $\frac{\text{⑩}}{\text{⑪⑫}}$ である。



- (7) 1625 と 1404 の最大公約数は、⑬⑭である。

- (8) $\frac{37}{54}$ の小数第 50 位の数は、⑮である。

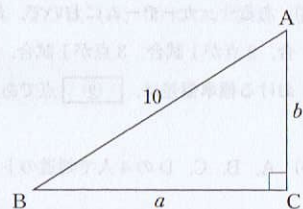
- (9) 正八面体のすべての頂点を、平面で切断する(右図は、1 つの頂点のみを切断した状態である)。ただし、各頂点の切断面に共通部分はないものとする。このとき、切断後の立体の頂点の数は ⑯⑰, 辺の数は ⑱⑲, 面の数は ⑳㉑ である。



II 右図のような直角三角形 ABC があり、 $\angle C = 90^\circ$ 、

AB = 10 であり、BC = a 、CA = b とする。次の

②② ~ ③⑨ の中に適切な数字を入れなさい。



(1) BC : CA = 4 : 3 のときを考える。

(i) $a =$ ②②, $b =$ ②③ である。

(ii) 直角三角形 ABC の内接円の半径は、②④ であり、外接円の半径は、②⑤ である。

(2) 内接円の半径を r とし、BC = a 、CA = b のときを考える。

(i) r を a 、 b で表すと、 $r = \frac{a+b-\text{②⑥ ②⑦}}{\text{②⑧}}$ となる。

(ii) $r = 1$ のときの a 、 b を求める。

各辺の長さは正であることと、三角形の存在条件より、 a 、 b は不等式 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $a + b > \text{②⑨ ③①}$ を満たす。

$\triangle ABC$ は直角三角形だから、三平方の定理より、 $a^2 + b^2 = \text{③① ③② ③③}$ を満たす。

$r = 1$ のとき、(i) より、 $\frac{a+b-\text{②⑥ ②⑦}}{\text{②⑧}} = 1$ を満たす。

これらから a 、 b を求めると、 $a > b$ の場合、

$a = \text{③④} + \sqrt{\text{③⑤ ③⑥}}$ 、 $b = \text{③⑦} - \sqrt{\text{③⑧ ③⑨}}$ である。

III a を実数とする。 x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^2 - (2a+5)x + a^2 + 5a - 6 < 0 & \cdots (1) \\ x^2 - (a^2+3)x - a^2 - 4 > 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

について考える。次の ④① ~ ④⑦ の中に適切な符号または数字を入れなさい。ただし、

(2) ~ (4) については、[選択肢]の中から選びなさい。

(1) $a = -2$ のとき、与えられた連立不等式を解くと、④①④① $< x <$ ④②④③ である。

(2) 不等式 (1) を解くと、④④、不等式 (2) を解くと、④⑤ である。④④、

④⑤ にあてはまる解として正しいものを、それぞれ次の ① ~ ⑦の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① $a - 1 < x < a + 6$ ② $a - 6 < x < a + 1$ ③ $a - 2 < x < a + 3$
 ④ $a - 3 < x < a + 2$ ⑤ $x < -a^2 - 4$, $-1 < x$ ⑥ $x < -a^2 - 4$, $1 < x$
 ⑦ $x < -1$, $a^2 + 4 < x$ ⑧ $x < 1$, $a^2 + 4 < x$

(3) 連立不等式 (1)、(2) の解が存在するとき、 a の値の範囲について正しいものを、次の ① ~ ④の中から選び、その番号を答えなさい。解答欄は ④⑥。

[選択肢]

- ① $a < 0$ ② $-1 < a < 2$ ③ $a < 2$ ④ $a < -1$, $2 < a$ ⑤ $a > 2$

(4) 連立不等式 (1)、(2) を満たす整数解が存在するとき、 a の値の範囲について正しいものを、次の ① ~ ④の中から選び、その番号を答えなさい。解答欄は ④⑦。

[選択肢]

- ① $a < 2$
 ② $\sqrt{3} < a < 2$
 ③ $-1 < a < \sqrt{3}$
 ④ $a < \sqrt{3}$
 ⑤ $a < -1$, $-1 < a < \sqrt{3}$

- IV 優菜さんと美波さんが、根号を含む式の計算について話している。2 人の会話を読みながら、次の 48 ~ 61 の中に適切な数字を入れなさい。ただし、(1), (3), (4) については、[選択肢]の中から選びなさい。

優菜：根号を含む式の計算をいくつかして、気になることがあったんだ。

美波：どんなこと？

優菜： $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ を書き換えると、 $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{32}$ だね。例えば、 x, y を自然数として、 $\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ となるとき、それらの根号の中を簡単にすると、必ず、 $\sqrt{2} + X\sqrt{2} = Y\sqrt{2}$ (X, Y は自然数) の形になると予想してみたんだ。

美波：予想で終わらないで、命題にして考えてみよう。

優菜：次のようにするのはどうだろう？

【命題 1】 x, y を自然数とする。

$\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ ならば $\sqrt{x} = X\sqrt{2}$, $\sqrt{y} = Y\sqrt{2}$ (X, Y は自然数) とかける。

美波：もう少しわかりやすく、次のように変えてみたよ。

【命題 2】 x, y を自然数とする。

$\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ ならば $x = 2X^2$, $y = 2Y^2$ (X, Y は自然数) とかける。

優菜：いいね。では命題 2 を証明してみよう。

【命題 2 の証明】 x, y を自然数とする。

$\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ のとき、両辺を 2 乗すると、

$$2 + x + 2\sqrt{2x} = y$$

$$2\sqrt{2x} = y - x - 2$$

優菜：右辺が整数なので、左辺の $2\sqrt{2x}$ は根号が外れないといけないから、 $x = 2X^2$ (X は自然数) となりそう。

美波：証明なので、もう少し丁寧に説明しなくてはいけないよ。 $2\sqrt{2x} = y - x - 2$ から $x = 2X^2$ を導きたいということは、左辺に代入して、 $2\sqrt{2 \times 2X^2} = y - x - 2$ 、つまり、 $4X = y - x - 2$ だから $y - x - 2$ が 48 であることを導けばいいんじゃないかな。

- (1) 48 にあてはまる言葉として正しいものを、次の①~④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① 2 の約数 ② 2 の倍数 ③ 4 の約数 ④ 4 の倍数 ⑤ 8 の約数 ⑥ 8 の倍数

優菜：なるほど。では命題 2 の証明の続きを書いてみよう。

【命題 2 の証明の続き】

両辺を 2 乗すると、

$$8x = (y - x - 2)^2$$

ここで、 $y - x - 2$ を 4 で割った商を X とすると、余りは 0 か 1 か 2 か 3 である。

- (i) $y - x - 2 = 4X + 1$ のとき

$8x = (4X + 1)^2 = \text{49} (\text{50} X^2 + X) + \text{51}$ となり、左辺を 49 で割った余りは 0 だが、右辺を 49 で割った余りは 51 となり等しくないので不適。

- (ii) $y - x - 2 = 4X + 2$ のとき

$8x = (4X + 2)^2 = \text{49} (\text{52} X^2 + \text{53} X) + \text{54}$ となり、左辺を 49 で割った余りは 0 だが、右辺を 49 で割った余りは 54 となり等しくないので不適。

- (iii) $y - x - 2 = 4X + 3$ のとき

$8x = (4X + 3)^2 = \text{49} (\text{55} X^2 + \text{56} X + \text{57}) + \text{58}$ となり、左辺を 49 で割った余りは 0 だが、右辺を 49 で割った余りは 58 となり等しくないので不適。

したがって、 $y - x - 2$ を 4 で割った商を X とすると、余りは 0 であり、

$y - x - 2 = 4X$ (X は自然数) とかけ、 $8x = (y - x - 2)^2$ に代入して、

$$8x = (4X)^2$$

よって、 $x = 2X^2$ (X は自然数) とかける。

また、これを、 $\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ に代入して、

$$\sqrt{2} + X\sqrt{2} = \sqrt{y}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$y = 2(1 + X)^2$$

よって、 $1 + X = Y$ とおくと、 $y = 2Y^2$ (Y は自然数) とかける。 (証明終わり)

- (2) 証明において、49 ~ 58 にあてはまる数字を答えなさい。

美波：すごい。うまく証明できたね。命題では「…とかけ」と書いたけれど、それを別の形

で書く方法を調べてみたよ。平方数という言葉を使うけれど、平方数とはある整数の 2 乗になっている数のことで、 0^2 , $(\pm 1)^2$, $(\pm 2)^2$, $(\pm 3)^2$, …つまり、0, 1, 4, 9…のこと。この言葉を用いると、命題は次のようになるよ。

【命題 3】 x , y を自然数とする。

$\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ ならば 59

- (3) 59 にあてはまる言葉として正しいものを、次の①～④の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① x は平方数、かつ、 y は平方数
- ② $\frac{x}{2}$ は平方数、かつ、 $\frac{y}{2}$ は平方数
- ③ x は平方数、または、 y は平方数
- ④ $\frac{x}{2}$ は平方数、または、 $\frac{y}{2}$ は平方数
- ⑤ $2x$ は平方数、または、 $2y$ は平方数

優菜：この命題 3 の逆は成り立つか考えてみたところ、反例を考えてみると成り立たないことがわかったよ。

美波：命題 3 の逆に反例があるということは、命題 3 の一方の条件が、他の条件に対する必要条件か十分条件かが判断できるね。

- (4) 命題 3 の逆において、 $(x, y) =$ 60 は反例である。命題 3 において、条件「59」は、条件「 $\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ 」であるための 61。

60、61 にあてはまる数値、言葉として正しいものを、それぞれ次の①～⑤の中から選び、その番号を答えなさい。

[選択肢]

- ① (2, 8)
- ② (8, 18)
- ③ (4, 8)
- ④ (8, 4)
- ⑤ (8, 32)

- ⑥ 必要条件であるが十分条件ではない
- ⑦ 十分条件であるが必要条件ではない
- ⑧ 必要十分条件である
- ⑨ 必要条件でも十分条件でもない