ハカセの 宇宙一キビしい チェック!!

理解できたものに，☑チェックをつけよう。

- [ ] 運動量の変化と力積の関係を用いて，気体分子1個が1回壁にぶつかったときに壁に与える力積を求められる。
- [ ] 気体分子が壁面間を1往復する時間を求められる。
- [ ] 気体分子が1秒間に壁にぶつかる回数を求められる。
- [ ] 「力積＝力×時間」の関係から，気体分子1個が壁に与える力を求められる。
- [ ] $v_x{}^2$ の平均を用いて，気体分子全体が壁に与える力を求められる。
- [ ] 気体の圧力を，分子の運動から導ける。
- [ ] 分子の運動エネルギーと温度の関係式 $\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$ を覚えた。

Chapter

10

気体の分子運動

Chapter

10 気体の分子運動

はじめに

このChapterではとても小さな世界を考えていきます。
小さな世界とは，「分子レベル」の世界のことです。
ここでは「気体の分子1粒」に注目するのです。
なので，この章の主役は「分子くん」となります。

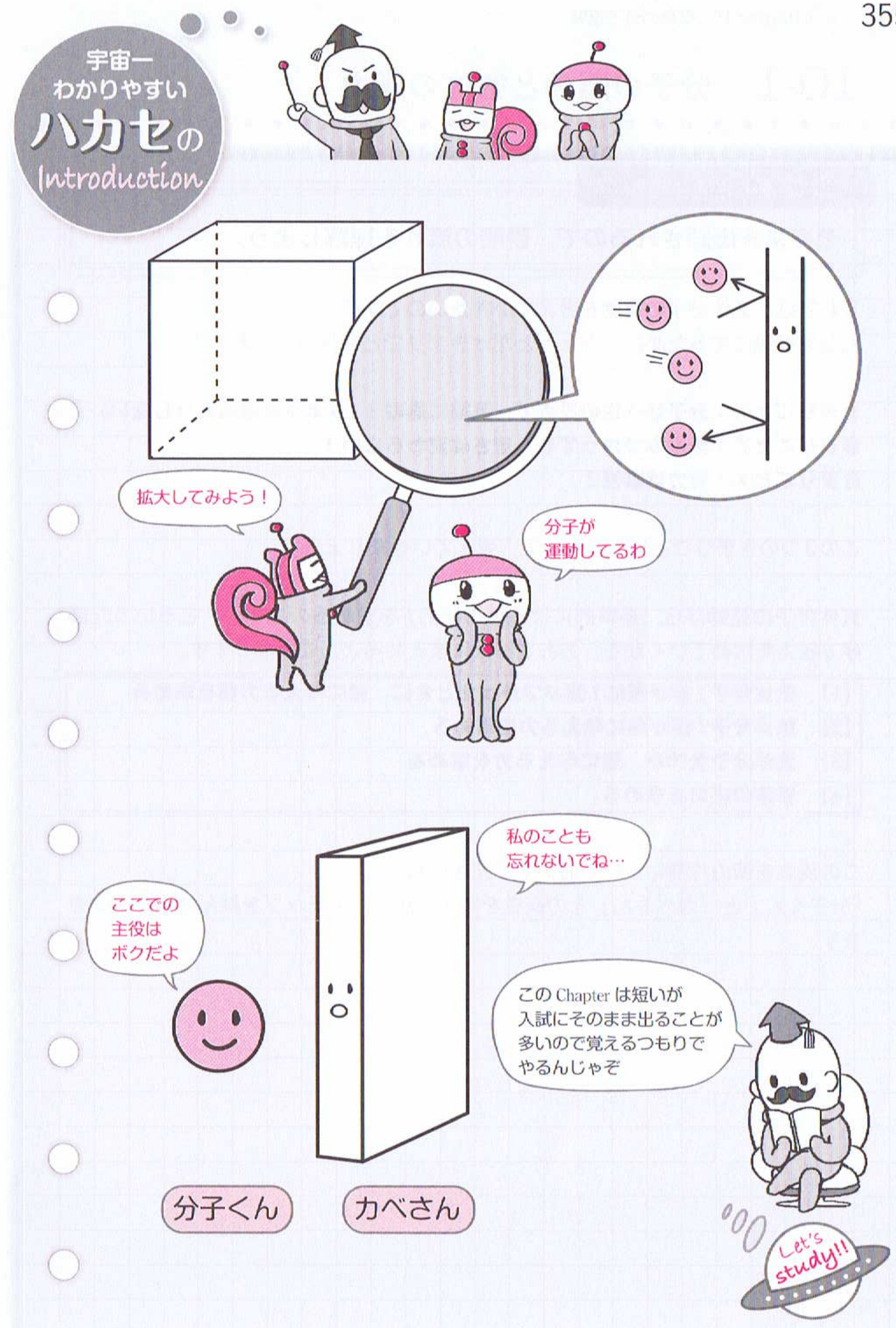
そして，最終的に，圧力を分子たちの運動から求めることが目的です。
また，「温度が高いと，気体分子たちは運動エネルギーが大きい」ということも理解できるようになりますよ。

このChapterで学ぶことは，最初は少し難しく感じるかもしれません。
しかし，しっかりと話の流れや計算を覚えるように何度も繰り返してください。
というのも，このChapterの話はそのまま入試問題に出ることも多いのです。

しっかり覚えて，入試で出たらガッツポーズができるように準備しましょう。

この章で勉強すること

いくつかのステップを踏んで，分子運動の目線から，圧力を求めていきます。
温度と分子運動の関係についても触れていきます。



10-1　分子の運動と気体の圧力

ココをおさえよう！

そのまま出題されるので，説明の流れを理解しよう。

それでは，気体分子の運動を考えていきたいのですが，
お話を簡単にするために，ちょっとだけきまりごとを作っておきます。

きまりごと①：分子は一定の速さで一直線に進む！（クネクネ進んだりしない）
きまりごと②：壁とぶつかっても，速さは変わらない！
きまりごと③：重力は無視！

この3つのきまりごとにしたがって，考えていきましょう。

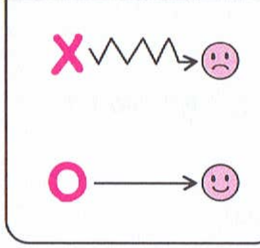
気体分子の運動から，最終的には気体の圧力pを求めるのですが，どういった順序で圧力を求めていくかを，おおざっぱにまとめると，こうなります。

【1】　気体分子1個が壁に1回ぶつかったときに，壁に与える力積を求める
【2】　気体分子1個が壁に与える力を求める
【3】　気体分子全体が，壁に与える力を求める
【4】　気体の圧力を求める

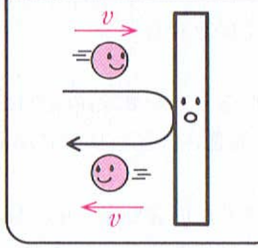
この流れを頭の片隅に置いておいてくださいね。
「分子くん」と「カベさん」との衝突を考えながら，ステップを踏んで学んでいきます。

気体分子運動のルール

きまりごと①
分子は一定の速さで
一直線に進む！



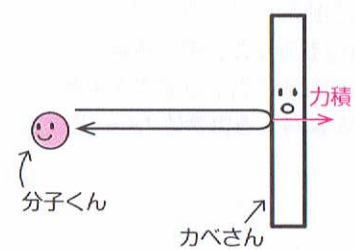
きまりごと②
壁とぶつかっても
速さは変わらない！



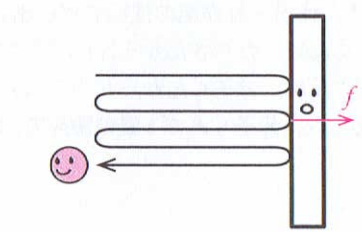
きまりごと③
分子の重力は
無視できる！

圧力pを求める流れ

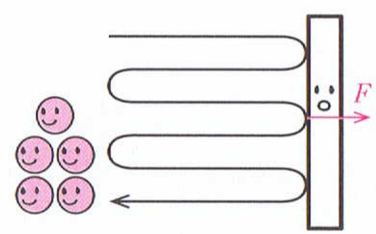
【1】　気体分子1個が壁に
1回ぶつかったときに
壁に与える力積を求める



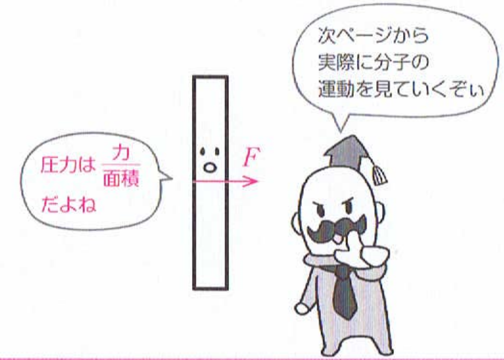
【2】　気体分子1個が
壁に与える力を求める



【3】　気体分子全体が
壁に与える力を求める



【4】　気体の圧力を求める



10

【1】 気体分子1個が，壁に1回ぶつかったときに，壁に与える力積を求める

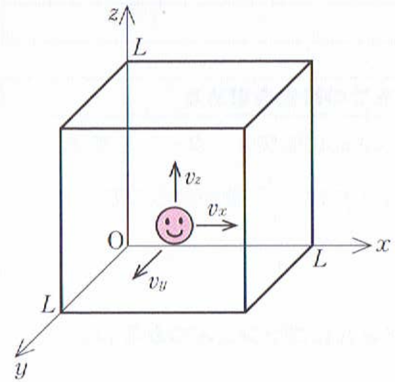
分子くんは1辺の長さLの部屋を動いており，質量はmであるとします。
分子くんはx，y，z方向に，それぞれv_x，v_y，v_zの速度で動きますが，まずは水平方向（x方向）の運動で考えていきましょう。

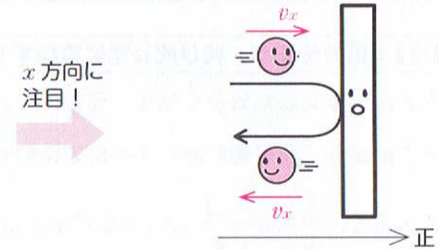
分子くんが，カベさんにぶつかると，今度は逆向きに速さv_xで動き始めます。
（きまりごと②より，衝突しても速さは変わりませんよ）
図の右方向を正とすると，
カベさんにぶつかる前の，分子くんの運動量：mv_x〔kg･m/s〕
カベさんにぶつかったあとの，分子くんの運動量：$-mv_x$〔kg･m/s〕

これを見ると，分子くんの運動量は，衝突で$-2mv_x$だけ変化していますね。
つまり，分子くんは，カベさんから$-2mv_x$の力積を受けたのです。
（運動量変化＝力積）

ここで，作用・反作用の法則を思い出してください。
「分子くんは，カベさんから左向きの力積$2mv_x$を受けた」のならば，
「カベさんは，分子くんから右向きの力積$2mv_x$を受けた」はずですよね。
したがって，**分子くんが1回の衝突で，カベさんに与える力積は$2mv_x$**となります。

【1】 気体分子1個が，壁に1回ぶつかったときに，壁に与える力積を求める



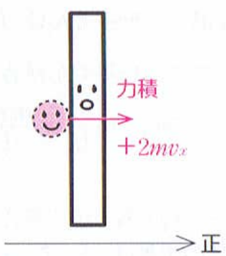


分子くんの運動量の変化を調べると…

衝突後　　　衝突前

$-mv_x \quad - \quad (+mv_x) \quad = \quad -2mv_x$

⇒ 作用・反作用の法則より
壁の受けた力積は
$+2mv_x$



【2】 気体分子1個が壁に与える力を求める

【2-1】：気体分子が，再び同じ壁に衝突するまでの時間を求める

カベさんに衝突した分子くんは，反対側のカベさんに衝突し，ターンします。

カベさんから，反対側のカベさんまで移動するのには，$\dfrac{L}{v_x}$ 秒かかるので，

往復すると，$\dfrac{L}{v_x}\times 2=\dfrac{2L}{v_x}$〔秒〕かかりますね。

つまり，**分子くんは，$\dfrac{2L}{v_x}$ 秒に1回，同じカベさんにゴツンとぶつかる**のです。

【2-2】：気体分子1個が，1秒間に壁にぶつかる回数を求める

1秒間に x 回ぶつかるとすると　$1:x=\dfrac{2L}{v_x}:1$　なので

1秒間に $\dfrac{v_x}{2L}$ 回，カベさんにぶつかります。

【2-3】：気体分子1個が，壁に与える力を求める

1秒間に，分子くんはカベさんに，$\dfrac{v_x}{2L}$ 回ぶつかることから，

1秒間で，分子くんがカベさんに与える力積は

$$2mv_x\times\frac{v_x}{2L}=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔kg·m/s〕}$$

分子くん1個が壁に与える力を f としましょう。
力積の定義は $f\times t$ で，$t=1$〔s〕としたので

$$f\text{〔N〕}\times 1\text{〔s〕}=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔kg·m/s〕}$$

ということですから

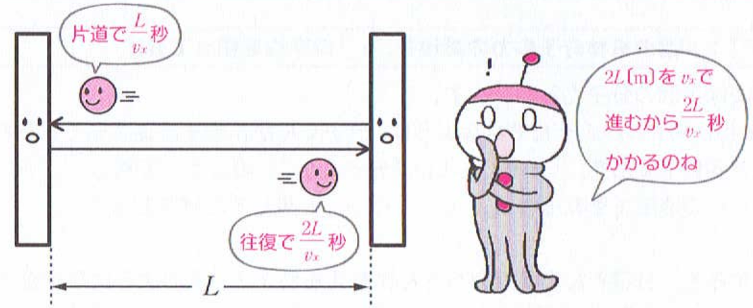
$$f=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔N〕}$$

となります。1秒間の力積と，力 f の値は同じですが，単位だけ変わっていますね。

10

【2】 気体分子1個が壁に与える力を求める

【2-1】：気体分子が，再び同じ壁に衝突するまでの時間を求める



【2-2】：気体分子1個が，1秒間に壁にぶつかる回数を求める

1秒に x 回，$\dfrac{2L}{v_x}$ 秒に1回の比が等しいから

$$1:x=\frac{2L}{v_x}:1$$

$$x=\frac{v_x}{2L}\text{〔回〕}$$

【2-3】：気体分子1個が，壁に与える力を求める

1秒間に与える力積は

$$\underbrace{2mv_x}_{\text{1回で与える力積}}\times\underbrace{\frac{v_x}{2L}}_{\text{1秒間にぶつかる回数}}=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔kg·m/s〕}$$

分子くん1個が与える力を f〔N〕とすると

$$f\text{〔N〕}\times 1\text{〔s〕}=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔kg·m/s〕}$$

$$f\text{〔N〕}=\frac{mv_x^2}{L}\text{〔kg·m/s}^2\text{〕}$$ ← この単位は〔N〕と等しい

【3】 気体分子全体が，壁に与える力を求める

【3-1】：N個の気体分子の力の総和を，$v_x^{\ 2}$の平均を使って表す

部屋にはN個の分子くんがいます。
50 m走のタイムが人それぞれなように，分子くんが移動する速度もそれぞれです。
なので各分子くんを，「分子くん1」，「分子くん2」のように区別し，
分子くんの速度をそれぞれv_{1x}，v_{2x}，…，v_{Nx}と表してあげましょう。

そうすると，分子くん全員がカベさんに与える力Fは，次のようになります。

$$F=\frac{mv_{1x}^{\ 2}}{L}+\frac{mv_{2x}^{\ 2}}{L}+\cdots\cdots+\frac{mv_{Nx}^{\ 2}}{L}=\frac{m}{L}(v_{1x}^{\ 2}+v_{2x}^{\ 2}+\cdots\cdots+v_{Nx}^{\ 2})$$

しかし，これだとものすごく式が長くなってしまいますね。

そこでN個の分子くんの$v_x^{\ 2}$の平均 $\overline{v_x^{\ 2}}=\dfrac{v_{1x}^{\ 2}+v_{2x}^{\ 2}+\cdots+v_{Nx}^{\ 2}}{N}$

を利用すると，Fは次のように表すことができます。

$$F=\frac{m}{L}\times N\overline{v_x^{\ 2}}=\frac{Nm\overline{v_x^{\ 2}}}{L}\quad\cdots\cdots①$$

したがって，**N個の分子くんがカベさんに与える力は，$F=\dfrac{Nm\overline{v_x^{\ 2}}}{L}$**です。

【3-2】：$\overline{v_x^{\ 2}}$を$\overline{v^2}$へ変換する

分子くんの速さvとv_x，v_y，v_zの関係は，三平方の定理より

$$v_x^{\ 2}+v_y^{\ 2}+v_z^{\ 2}=v^2$$

これはすべての分子で成り立つので，平均を使っても成り立ちます。

$$\overline{v_x^{\ 2}}+\overline{v_y^{\ 2}}+\overline{v_z^{\ 2}}=\overline{v^2}\quad\cdots\cdots②$$

また，分子くんはランダムに動いていますが，全部の分子くんを見るとx方向，y方向，z方向のどの動きも平均的に同じになるので

$$\overline{v_x^{\ 2}}=\overline{v_y^{\ 2}}=\overline{v_z^{\ 2}}\quad\cdots\cdots③$$

②，③より $\overline{v_x^{\ 2}}=\dfrac{1}{3}\overline{v^2}$

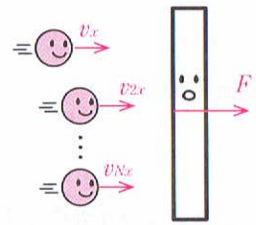
これを①に代入して

$$F=\frac{Nm\overline{v_x^{\ 2}}}{L}=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}$$

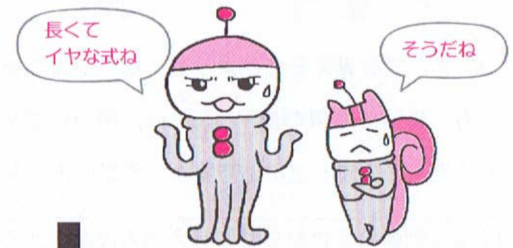
10

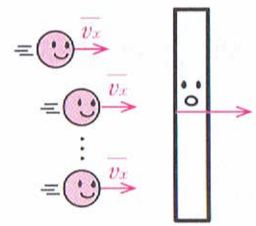
【3】 気体分子全体が，壁に与える力を求める

【3-1】：N個の気体分子の力の総和を，v_x^2の平均を使って表す



$$F=\frac{mv_{1x}^2}{L}+\frac{mv_{2x}^2}{L}+\cdots\cdots+\frac{mv_{Nx}^2}{L}$$
$$=\frac{m}{L}(v_{1x}^2+v_{2x}^2+\cdots\cdots+v_{Nx}^2)$$





N個の分子のv_x^2の平均をとると

$$\overline{v_x^2}=\frac{v_{1x}^2+v_{2x}^2+\cdots\cdots+v_{Nx}^2}{N}$$

よって $N\overline{v_x^2}=v_{1x}^2+v_{2x}^2+\cdots\cdots+v_{Nx}^2$

ゆえに $\boxed{F=\dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{L}\quad\cdots\cdots①}$

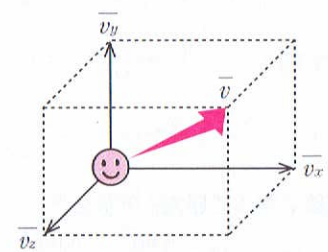
【3-2】：$\overline{v_x^2}$を$\overline{v^2}$へ変換する

三平方の定理を用いて

$$\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}=\overline{v^2}\quad\cdots\cdots②$$
$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}\quad\cdots\cdots③$$

②，③より $\overline{v_x^2}=\dfrac{1}{3}\overline{v^2}$

①より $\boxed{F=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L}}$



【4】 気体の圧力を求める

最後の仕上げです。部屋にいる気体分子くん全員がカベさんに与える力Fは

$$F=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}$$

ですので，これを壁の面積L^2で割れば圧力pが求められます。

$$p=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}\div L^2=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}=\boldsymbol{\frac{Nm\overline{v^2}}{3V}}\quad〔完〕$$

出てきた式を覚えることよりも，自分で流れを導けることのほうが大切です。

でも，最後の結果の値 $\boldsymbol{\frac{Nm\overline{v^2}}{3V}}$ は，導いた答えが合っているかの確認に使えますので覚えてしまうといいですよ。簡単に流れをまとめると以下のようになります。

【1】運動量の変化から壁に与える力積を求める。

1回の衝突で気体分子の運動量の変化が $-2mv_x$ → 壁に与える力積$2mv_x$

【2】1秒間に与える力積から，力を求める。

気体分子は1往復するのに $\frac{2L}{v_x}$ 秒かかるので，1秒間に $\frac{v_x}{2L}$ 回，壁にぶつかる。

1秒間に与える力積は $2mv_x\times\frac{v_x}{2L}=\frac{mv_x^{\,2}}{L}$〔kg・m/s〕

その力積を1sで割ると力が求められる $\frac{mv_x^{\,2}}{L}$〔N〕

【3】N個の分子が与える力 → $v_x^{\,2}$の平均を利用 → $\overline{v_x^{\,2}}$を$\overline{v^2}$へ

分子に番号をつけて壁に与える力の総和を求めると

$$F=\frac{m}{L}(v_{1x}^{\,2}+v_{2x}^{\,2}+\cdots\cdots+v_{Nx}^{\,2})$$

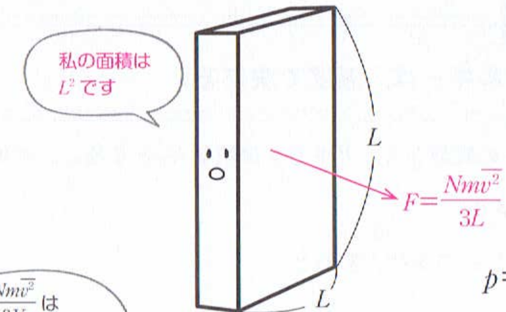
$v_x^{\,2}$の平均 $\frac{v_{1x}^{\,2}+v_{2x}^{\,2}+\cdots+v_{Nx}^{\,2}}{N}=\overline{v_x^{\,2}}$を利用すると $F=\frac{Nm\overline{v_x^{\,2}}}{L}$

さらに，$\overline{v_x^{\,2}}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$から $F=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}$

【4】面積で割って圧力pを求める。

$$p=F\div L^2=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}=\frac{Nm\overline{v^2}}{3V}$$

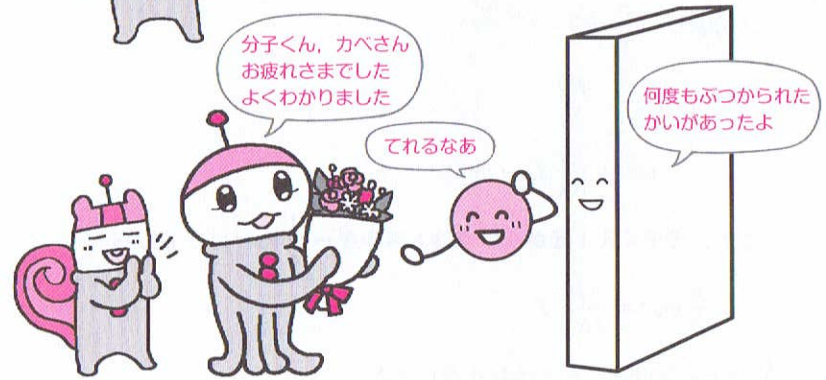
【4】 気体の圧力を求める



$$p=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}\div L^2$$

$$=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{Nm\overline{v^2}}{3V}}\quad〔完〕$$



ここまでやったら
別冊 P.88へ

10-2 分子の運動と気体の温度

ココをおさえよう！

分子の平均の運動エネルギーは，温度で決まる。

容器に入っている気体の分子の総数をN，アボガドロ数をN_Aとすると，気体のモル数nは，$n=\dfrac{N}{N_A}$ となりますね。

気体の状態方程式$pV=nRT$にこれを代入すると

$$pV=\frac{N}{N_A}RT \quad \cdots\cdots ①$$

また10-1で導いた$p=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3V}$の両辺に$V$を掛けると

$$pV=\frac{Nm\overline{v^2}}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より $\dfrac{N}{N_A}RT=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3}$

すなわち $\dfrac{m\overline{v^2}}{3}=\dfrac{RT}{N_A}$

$$m\overline{v^2}=\frac{3R}{N_A}T \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，**分子くん1個がもつ運動エネルギー** $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ は③式から

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3R}{2N_A}T}$$

$\dfrac{R}{N_A}=k$とおけば，以下の式が現れます。

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT} \quad \left(k=\frac{R}{N_A}\text{を}\textbf{ボルツマン定数}\text{と呼びます}\right)$$

赤字にした2つの式は覚えておきましょう。

この式から，**「分子1個の運動エネルギーは，温度Tに比例し，圧力pや体積Vには影響されない！」**ということがわかります。

9-4や9-5で触れましたが，「温度は分子たちの元気さを表す」ということですね。

10

容器内の気体の分子の総数をN，アボガドロ数をN_Aとすると

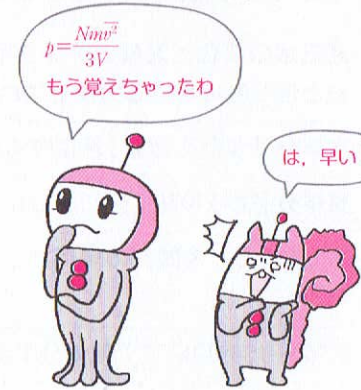
$$n=\frac{N}{N_A}$$

よって $pV=nRT=\dfrac{N}{N_A}RT \quad \cdots\cdots ①$

$$\boxed{p=\frac{Nm\overline{v^2}}{3V}}$$

両辺にVを掛ける

$$\boxed{pV=\frac{Nm\overline{v^2}}{3} \quad \cdots\cdots ②}$$

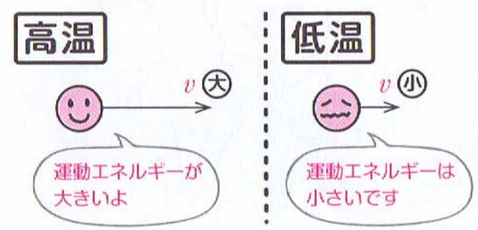


①，②より

$$\frac{Nm\overline{v^2}}{3}=\frac{N}{N_A}RT \Rightarrow m\overline{v^2}=\underbrace{\frac{3R}{N_A}}_{\text{定数}}\underbrace{T}_{\text{変数}}$$

分子の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\underbrace{\frac{3R}{2N_A}}_{\text{定数}}\underbrace{T}_{\text{変数}}=\frac{3}{2}\underbrace{k}_{k=\frac{R}{N_A}}T$$



ここまでやったら 別冊 P.89へ